**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ НА МНОГОЯДЕРНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ**

**С.Ю. Фиалко**, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

(Технический университет им. Тадеуша Костюшки «Краковская Политехника», SCAD Soft)

**Аннотация.** Представлен блочный метод сопряженных градиентов с предобуславливанием неполной факторизации Холецкого для определения частот и форм собственных колебаний расчетных моделей большой размерности, возникающих при применении метода конечных элементов к задачам строительной механики и механики деформируемого твердого тела.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, обобщенная проблема на собственные значения, метод сопряженных градиентов, предобуславливание, многопоточность.

Чаще всего в большинстве программных комплексов для определения частот и форм собственных колебаний используется либо блочный метод Ланцоша, либо блочный метод итерации в подпространстве, основанные на методе итерации обратной матрицы. Поэтому на каждом шаге итерации необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с разреженной симметричной матрицей высокого порядка, выполняя прямые и обратные подстановки. Учитывая тот факт, что размер такой матрицы для большеразмерных расчетных моделей превышает объем оперативной памяти для большинства настольных многоядерных компьютеров, факторизованная матрица жесткости блоками записывается на диск, а в процессе прямых-обратных подстановок эти блоки считываются в оперативную память. *Поэтому прямые-обратные подстановки для больших задач выполняются со скоростью медленного диска, а не быстрого процессора, что приводит к значительному возрастанию времени вычислений.*

Одним из альтернативных подходов для определения частот и форм собственных колебаний является метод сопряженных градиентов. Все вычисления происходят в оперативной памяти, однако вследствие плохой обусловленности большинства реальных задач строительной механики классические реализации этого метода приводят как правило к запиранию сходимости.

В предлагаемой работе для обеспечения высокой вычислительной устойчивости метода в качестве предобуславливания [1] применяется блочная версия неполной факторизации Холецкого [3], техника сдвигов [3], а также блочная версия метода сопряженных градиентов, основанная на аппроксимации, предложенной в методе LOBPCG (Local Block Preconditioned Conjugate Gradient) [2]:

, (1)

где **x***kj*, **z***kj*, **p***kj* – аппроксимация вектора перемещений, невязки и сопряженного направления для собственной формы *j* на шаге итерации *k*, *m* – размерность блока. На каждом шаге итерации вычисляются проекции матрицы жесткости **k** = **Q***T***KQ** и матрицы масс **m** = **Q***T***MQ** (**K** и **M** – исходные матрицы жесткости и масс) на подпространство, определяемое системой векторов (1). Здесь **Q** = {**z***k*1,…, **z***km*, **x***k*1,…, **x***km*, **p***k*1,…, **p***km*}.

Как показали наши исследования, как только начинает сходиться первая собственная пара, в матрице **Q** появляются линейно зависимые столбцы, что приводит к вычислительной нестабильности LOBPCG метода. Для стабилизации численного решения мы, *во-первых*, удерживаем постоянным размерность блока *m*, которая не зависит от количества требуемых собственных пар, и как только очередная собственная пара *j* сходится, мы удаляем все соответствующие ей векторы **x***kj*, **z***kj*, **p***kj* из блока, заменяем сошедшийся вектор **x***kj* новым стартовым вектором, доопределяем соответствующие векторы **z***kj*, **p***kj* и продолжаем вычислительный процесс. *Во-вторых*, если все-таки столбцы матрицы проекции **Q** становятся близкими к линейно зависимым, производится реортогонализация всех столбцов [3], служащих базисом.

Все ведущие этапы метода распараллелены на основе многопоточности для архитектуры компьютеров с общей памятью. Для расчетной модели многоэтажного здания, содержащей 2 989 476 уравнений, определяется 100 собственных пар при размерности блока *m* = 32. Грунт моделируется объемными конечными элементами, которые порождают подматрицы относительно высокой плотности в разреженной глобальной матрице жесткости, в результате чего объем факторизованной матрицы жесткости составляет 36.53 Гб. Задача решалась на компьютере с 16-ядерным процессором AMD Opteron 6276, 2.3/3.2 ГГц, 64 Гб DDR3 ОП, 64 разрядная ОС Windows Server 2008 R2 Enterprise SP1. Продолжительность решения предлагаемым подходом составляет 14 552 с, а блочным методом Ланцоша, использующим прямой метод для разреженных матриц PARFES [1], [3] – 14 096 с в режиме использования только оперативной памяти и 34 660 с при использовании диска (чаще всего это единственно доступный режим на серийных настольных компьютерах при решении задач большой размерности). Таким образом, если при решении блочным методом Ланцоша задача целиком помещается в оперативную память, то предлагаемый подход демонстрирует примерно такую же производительность, как и блочный метод Ланцоша. В противном случае предлагаемый метод оказывается значительно быстрее.

***Литература***

1. Fialko S. Yu. Iterative methods for solving large-scale problems of structural mechanics using multi-core computers // Archieves of Civil and Mechanical Engineering. 2014. Vol. 14. P. 190 – 203. [doi:10.1016/j.acme.2013.05.009](http://dx.doi.org/10.1016/j.acme.2013.05.009).
2. Knyazev A. V., Neymayr K. Efficient solution of symmetric eigenvalue problem using multigrid preconditioners in the locally optimal block conjugate gradient method // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2003. Vol. 15. P. 38 – 55. URL: <https://eudml.org/doc/123270>.
3. Fialko S., Karpilovskyi V. Block subspace projection preconditioned conjugate gradient method for structural modal analysis // Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems. ISSN 2300-5963 ACSIS. Vol. 11. P. 497–506. DOI: 10.15439/2017F64.

**APPLICATION OF THE BLOCK PRECONDITIONED CONJUGATE GRADIENT METHOD FOR EXTRACTION OF THE NATURAL VIBRATION FREQUENCIES AND MODES IN SEISMIC ANALYSIS OF BUILDINGS AND STRUCTURES ON MULTI-CORE COMPUTERS**

S. Yu. Fialko, dr. hab. eng., senior researcher.

Prof. Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology

& Scientific Adviser of SCAD Soft IT company.

**Annotation.** A block conjugate gradient method with incomplete Cholesky factorization preconditioning for extracting the natural vibration frequencies and modes of computational models of large dimension that arise when the finite element method is applied to the problems of structural and solid mechanics is presented.

**Key words:** finite element method, eigenvalue problem, conjugate gradient method, preconditioning, multithreading.